Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Abgabe 16.12.2011 vor der Plenarübung

---

## ABLEITUNGEN, POTENTIALE, FELDER II

Mit diesen Aufgaben bekommen Sie mehr Routine im Berechnen von Ableitungen, Gradient und Rotation.

**[H28]** *Kraftfelder* **[2 + 2 + 2 = 6 Punkte]**

Berechnen Sie zu den folgenden Potentialen die zugehörigen Kraftfelder, und skizzieren Sie qualitativ die Äquipotentiallinien in der Ebene $z = 0$:

(a) $V(\vec{r}) = \cos(\vec{k} \cdot \vec{r})$,

(b) $V(\vec{r}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$,

(c) $V(\vec{r}) = \sqrt{x^4 + y^4 + z^4 + 4x^2y^2 + 4y^2z^2 + 4z^2x^2}$.

**[H29]** *Monopol* **[2 + 2 + 2 = 6 Punkte]**

Wenn es einen magnetischen Monopol der Ladung $4\pi g$ gäbe, der im Ursprung ruht, hätte dieser ein Magnetfeld

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{g}{r^2}\vec{e}_r \,.$$

Magnetfelder sind keine Gradientenfelder skalarer Potentiale, sondern sind Rotationen von Vektorpotentialen. In unserem Fall haben wir die Vektorpotentiale

$$\vec{A}_S(\vec{r}) = \frac{g}{r(r-z)}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \,, \quad \vec{A}_N(\vec{r}) = \frac{g}{r(r+z)}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \,.$$

(a) Zeigen Sie, dass außerhalb der positiven $z$-Achse ($x = y = 0, z \geq 0$) das Magnetfeld als Rotation des einen Vektorpotentials geschrieben werden kann, $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}_S$, wobei $S$ für "Süd" steht.

(b) Zeigen Sie, dass außerhalb der negativen $z$-Achse ($x = y = 0, z \leq 0$) das Magnetfeld als Rotation des anderen Vektorpotentials geschrieben werden kann, $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}_N$, wobei $N$ für "Nord" steht.

(c) Bestätigen Sie, dass sich beide Vektorpotentiale im gemeinsamen Gültigkeitsbereich, $x^2 + y^2 > 0$, nur um eine sogenannte Eichtransformation unterscheiden, dass also gilt:

$$\vec{A}_N(\vec{r}) - \vec{A}_S(\vec{r}) = \frac{2g}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{grad}(g\phi) \quad \text{mit} \quad \phi = \arctan\frac{y}{x} \,.$$

*Hinweis*: Für die Rechnungen ist es sinnvoll und erleichternd, $g = 1$ zu setzen.

## HINWEIS

**Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!**